**Ciências e Tecnologias Espaciais**

**Sensores e Atuadores Espaciais**

**Métodos Numéricos e Aplicações em Clusters I – Básico**

**Lista de Exercícios 3**

Professor: Angelo Passaro

Aluno: Lucas Kriesel Sperotto

27 de Abril de 2012

**1** – Como ficam as equações se o material for homogêneo e anisotrópico, com tensor de anisotropia diagonal?

Tomando a equação de Poisson para meios anisotrópicos:

Como a propriedade é homogênea ela não depende de posição. Pode-se definir um tensor para as propriedades físicas e com a discretização para elementos finitos, o tensor se mantém na forma matricial da integral. Detalhes da montagem do tensor em [5]. Como o tensor é diagonal, assume-se que apenas os elementos diagonais da matriz são não nulos.

Onde:

Caso os vetores de propriedade física não esteja perfeitamente alinhados com o plano adotado, deve-se usar uma matriz de transformação. Detalhes no livro do Cardoso.

**2** – Como podem ser tratado um material isotrópico, mas cuja propriedade varia continuamente em função da posição (pensar no caso 2D)?

Basta associar a propriedade física a um elemento :

**3** – Como seriam modificadas as equações, se utilizarmos elementos triangulares de segunda ordem?

Tendo como exemplo a equação de Poisson na forma matricial para elementos finitos triangulares de primeira ordem:

As equações para elementos de segunda ordem na sua forma matricial são praticamente as mesmas. As mudanças ocorrerão apenas nos tamanhos dos vetores e e das matrizes .

**4** – E se usarmos elementos de outras famílias?

Se por família de elementos entendermos a dimensão do elemento, a forma geométrica (quadrilátero, triangular,...), a resposta para esta pergunta é a mesma resposta da questão 3, as mudanças residirão apenas no vetor das funções de forma e na matriz com suas derivadas.

Agora se considerarmos como família do elemento se ele é do tipo Lagrange ou Hermite, as diferenças nas equações se tornam mais evidentes, alterando a quantidade de soluções obtidas, por exemplo, para elemento de Hermite o vetor é composto pelas variáveis de estado e suas derivadas .

**5** – Como tratar condições de Neumann não homogêneas ()?

Na equação e Poisson:

aparece um termo adicional:

onde é a região do elemento com a condição de Neumman não homogênea, no caso de um elemento de duas dimensões é uma aresta e no caso tridimensional uma superfície. O vetor de funções de base na integral em terá um tamanho diferente do vetor da outra integral. Um cuidado deve ser tomado para que as parcelas integrais sejam atribuídas no vetor global com os índices corretos.

**6** – Qual a matriz de conexão para o exemplo de Saad, cap. 2, pg. 62?

A matriz é construída com dimensões , onde é o numero de pontos do elemento e é o numero de pontos do domínio. A matriz montada para cada elemento esta exposta na tabela 1.

Tabela 1 - Montagem das Matrizes para cada elemento .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Elemento ()** | **Numeração Local** | **Numeração Global** | | | | | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| **1** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 |
| **4** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| **5** | **1** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | **1** | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **7** | **1** | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **8** | **1** | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **9** | **1** | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **10** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **11** | **1** | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 |
| **12** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **13** | **1** | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 |
| **14** | **1** | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| **15** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 |
| **16** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 |

**Referências:**

[1] CHAPRA, Steven C; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. Trad. Helena Castro. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

[2] SAAD, Y., **Iterative Methods for Sparse Linear Systems.** 2ª Ed. 2000.

[3] DHATT, G. TOUZOT, G. Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis. 2ª Ed. France: Editeur Paris. 1984.

[4] CARDOSO, J. R. Introdução ao método dos Elementos Finitos. 1ª Ed. Publicação Independente.

[5] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Tensor> Acessado em Abril de 2012.